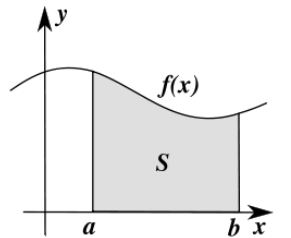
**INTEGRAL**

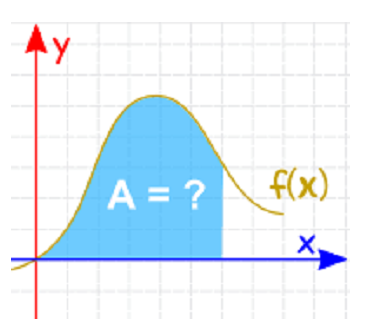
1. **Pendahuluan**

Integral merupakan suatu objek matematika yang dapat diinterpretasikan sebagai luas wilayah ataupun generalisasi suatu wilayah. Proses menemukan integral suatu fungsi disebut sebagai pengintegralan ataupun integrasi. Integral dibagi menjadi dua, yaitu: integral tertentu dan integral tak tentu. Notasi matematika yang digunakan untuk menyatakan integral adalah ʃ , seperti huruf S yang memanjang (S singkatan dari *"Sum"* yang berarti penjumlahan). *(Wikipedia)*

****

Gambar 1. Integral dapat dianggap sebagai perhitungan luas daerah di bawah kurva *ƒ*(*x*), antara dua titik *a* dan *b*.

Proses integrasi adalah suatu proses menjumlahkan bagian-bagian kecil untuk memperoleh luas atau volume keseluruhan. Integral dapat digunakan untuk menghitung luas area, volume, titik pusat, dan lainnya. Untuk lebih memudahkan dalam memahami konsep integral, kita mulai dengan menemukan luas area pada kurva berikut.



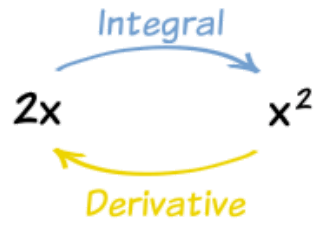
Gambar 2. Berapa luas area di bawah kurva ?

Perhatikan penjelasan berikut ini mengenai konsep “potongan *(slices)*”.

|  |  |
| --- | --- |
| Gambar 3a. | Kita bisa menghitung fungsi tersebut di beberapa titk dan kemudian menambahkan beberapa segmen kecil dengan lebar Δx (tetapi jawabannya tidak akan akurat). |
| Gambar 3b. | Kemudian kita bisa membuat segmen-segmen tersebut dengan lebar Δx yang lebih sempit lagi. Sehingga kita memiliki segmen yang lebih banyak lagi (jawaban akan semakin baik). |
| Gambar 3c. | Dan ketika segmen-segmen tersebut lebarnya mendekati nol, maka jawabannya semakin mendekati kebenaran.  Sekarang simbol Δx dirubah menjadi dx yang artinya lebar segmen mendekati nol. |

Tetapi kita tidak perlu melakukan proses penjumlahan tersebut, karena segmen-segmen yang dijumlahkan tersebut sangatlah banyak. Ada cara singkat *(shortcut)* untuk menghitung luas area di bawah kurva, yaitu melalui proses integrasi.

Integral adalah proses kebalikan *(inverse)* dari turunan, biasa disebut sebagai *anti differentiataion* atau *anti derivatives*. Misalnya fungsi , maka anti turunan dari fungsi tersebut adalah .



Gambar 4. Integral adalah proses kebalikan dari turunan. Contohnya; anti turunan dari fungsi adalah .

**Simbol Integral**

Simbol atau notasi dari integral adalah ʃ , seperti huruf “S” yang memanjang. Dimana “S” artinya adalah *Sum* (penjumlahan).



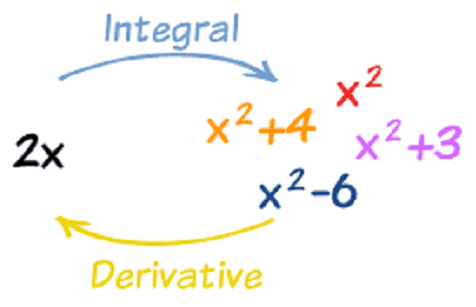
Gambar 5. Simbol integral dan arti setiap bagian

Setelah simbol integral kita tempatkan fungsi yang ingin kita ketahui integralnya disebut *integrand*. Dan kemudian diakhiri oleh simbol yang artinya kita membagi perhitungan pada segmen-segmen kecil sepanjang arah x yang lebarnya menuju nol.

Bagaimana cara menjawab atau menuliskan sebuah hasil operasi integral ? Begini caranya ;

Mengapa harus ditambahkan sebuah huruf C, padahal kita sudah dapatkan jawabannya, yaitu . C disini disebut sebagai ***konstanta integrasi***.

Perhatikan penjelasan dalam gambar dibawah berikut.



Gambar 7. Operasi integral dari fungsi dapat menghasilkan banyak fungsi. Dan turunan dari semua fungsi di kanan hasilnya adalah sama (, yaitu .

Turunan dari adalah , dan turunan dari juga adalah , begitupun turunan dari dan seterusnya. Jadi, ketika kita mencari turunan dari fungsi hasil integral kita hanya tahu , tetapi ada sebuah konstanta yang nilainya tidak diketahui yang menyertai hasil sebuah proses integral. Dan kita tuliskan konstanta tersebut adalah C.

**Memahami Konsep Integral Dengan Mudah**

Agar konsep integral ini dipahami dengan mudah, coba perhatikan penjelasan berikut ini.

|  |  |
| --- | --- |
| Gambar 8. Aliran air dari keran ke wadah | Proses integrasi mirip seperti mengisi air pada sebuah wadah. Inputnya (sebelum proses integrasi dilakukan) adalah volume rata-rata aliran air dari keran. Integralkan aliran air tersebut (menambahkan jumlah aliran air secara perlahan) akan memberikan kita sejumlah volume air di dalam wadah. |

Bayangkan air tersebut mengalir dari kedudukan 0 (kosong) dan secara perlahan *(gradually)* bertambah (misalkan keran tersebut bekerja dengan menggunakan motor yang dapat mengontrol proses buka-tutup-nya).

|  |  |
| --- | --- |
| Gambar 9. Mengalirkan air dari keran *(mengintegrasikan aliran air)* untuk mmemperoleh volume air dalam wadah *(hasil integrasi aliran air)*. | Ketika aliran air bertambah dari keran, wadah akan terisi dengan air semakin cepat dan terus bertambah cepat. Dengan rata-rata aliran airnya , wadah akan terisi sebanyak . Artinya, ***kita telah mengintegralkan aliran air untuk memperoleh volumenya.*** |

Contoh :

Asumsikan bahwa volume aliran air adalah dalam liter per menit. Maka, setelah 3 menit (), aliran air tesebut telah mencapai , dan volume air yang mengisi wadah adalah .

Kitapun dapat berpikir tentang poreses kebalikannya. Misalkan kitta tidak tahu berapa rata-rata aliran airnya, yang kita ketahui hanya volume air dalam wadah yang bertambah sebanyak .

|  |  |
| --- | --- |
| Kita dapat lakukan proses kebalikannya (yaitu dengan menggunakan turunan, yang memberikan kita informasi tentang nilai kemiringan *(slope)*). Kita peroleh bahwa aliran airnya adalah . | Gambar 10. |

Contoh :,

Pada menit ke-2, kemiringan dari volume air adalah 2, artinya volume air bertambah 4 liter/menit. Hal yang sama, pada menit ke tiga kemiringannya adalah 6, dst.

Kita peroleh informasi berikut,

|  |  |
| --- | --- |
| Integral dari rata-rata aliran air, , memberikan kita informasi volume air. |  |
| Kemiringan dari volume, , memberikan kita kembali rata-rata aliran air. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Kita memperoleh informasi tambahan, yaitu mengenai konstanta C....(mungkin wadah tersebut yang sudah terisi air sebelumnya). Dalam matematika, C ini diperoleh dari **syarat awal**. | Gambar 11. |

1. **Jenis Integral**

Secara umum integral dibagi atas dua jenis, yaitu integral tak tentu dan integral tertentu.

**Integral Tak Tentu**

Secara sederhana definisi integral sudah dijelaskan pada sub bab pertama. Integral adalah proses kebalikan *(inverse)* dari turunan, biasa disebut sebagai *anti differentiataion* atau *anti turunan*.

**Definisi**

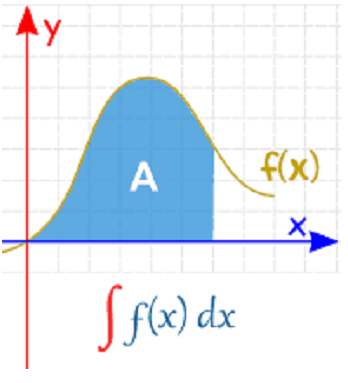
Kita sebut adalah anti turunan dari pada suatu interval *I* bila di *I*, yaitu untuk semua di *I*.

atau

Apabila

Keseluruhan himpunan antiturunan/antiderivatif sebuah fungsi *ƒ* adalah integral tak tentu ataupun primitif dari *ƒ* terhadap x dan dituliskan secara matematis sebagai:

Yang menjadi ciri dari integral tak tentu adalah tidak adanya interval yang membatasi proses perhitungan integral dan dicirikan oleh lambang integral yang “polos”, **ʃ**. Dan juga kehadiran konstanta integrasi **C** menjadi ciri dari integral tak tentu.



Gambar 12. Definisi Integral Tak Tentu dalam bentuk kurva

Contoh :

Bila diketahui, maka

Gambar 13. Gambar di atas memperlihatkan anti turunan dari *f*(*x*) = 2*x* dan anti turunannya adalah pada interval [-2,2]. Konstanta integrasi C diambil pada nilai (-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5)

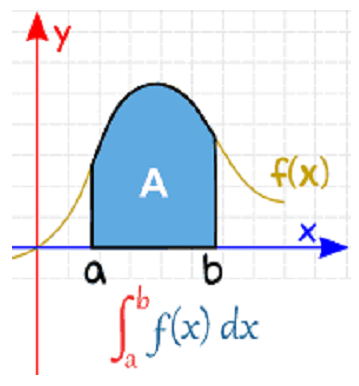
Mengikuti Leibniz, kata integral tak tentu *(Indefinite Integral)* adalah istilah lain dari anti turunan.

**Integral Tertentu**

Dalam proses penghitungan integral tertentu, ciri utama yang menjadi khas-nya adalah adanya “batas bawah” dan “batas atas”, atau dengan kata lain ada interval yang membatasi proses integrasi. Misalnya, dari atau pada interval . Biasanya dituliskan dengan simbol berikut ;

secara informal didefinisikan sebagai luas wilayah pada bidang xy yang dibatasi oleh kurva grafik *ƒ*, sumbu­-x, dan garis vertikal dan .

Pada notasi integral di atas: *a* adalah *batas bawah* dan *b* adalah *batas atas* yang menentukan domain pengintegralan, *ƒ* adalah integran yang akan dievaluasi terhadap *x* pada interval [a,b], dan *dx* adalah variabel pengintegralan.



Gambar 14. Integral dapat dianggap sebagai perhitungan luas daerah di bawah kurva  
*ƒ*(*x*), antara dua titik *a* dan *b*.

Contoh :

Menghitung integral tertentu dari fungsi , pada interval .

Yang harus dihitung adalah,

Dari definisi integral tak tentu, kita ketahui bahwa

* di titik x = 1,
* di titik x =2,

Kemudian kurangkan,

Terlihat, konstanta integrasi C saling menghilangkan. Jadi dalam integral tertentu, konstanta integrasi C kita abaikan.

Sebenarnya kita dapat menghitung langsung integral diatas,

Kita dapat memeriksa jawabannya dengan menghitung luas area dari bentuk kurva fungsinya,



Gambar 15.

1. **Aturan Integral Tak Tentu**

Integral dari banyak fungsi sudah banyak dikenal orang melalui tabel integral yang sudah banyak dibukukan. Bahkan jumlah hasil perhitungan integral tersebut sangatlah banyak.

Ada empat aturan utama dalam integral yang bisa dilihat pada tabel 1 berikut ini.

Tabel 1. Aturan Integral

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **No.** | **Teorema** | **Aturan Integral** |
| 1. | **Teorema A**  Bila r adalah bilangan rasional kecuali -1 |  |
| 2. | **Teorema B** | dan |
| 3. | **Teorema C**  ***Integral Tak Tentu adalah operator linear.*** | Misalkan f dan g memiliki anti turunan (integral tak tentu) dan misalkan k adalah konstanta. Maka, |
| 4. | **Teorema C**  Aturan Perpangkatan Umum | Misalkan g adalah fungsi yang diferensiabel dan r adalah bilangan rasional yang bukan -1. Maka, |

Contoh 1 :

Cari solusi dari anti turunan atau integral tak tentu dari fungsi berikut : .

Jawab :

Misalkan solusi dari anti turunan diatas adalah . Maka, kita dapat menebak bahwa solusinya adalah , karena solusi tersebut memenuhi .

Dalam materi turunan, kita telah ketahui bahwa turunan disimbolkan oleh Dalam matematika, kedua simbol tersebut disebut sebagai *operator*.

*Penjelasan :*

*Misalkan kita punya fungsi . Maka,*

*artinya bahwa operator bekerja pada fungsi*

*Untuk konsep anti turunan atau integral pun telah dikenal sebuah operator yang dikenal dengan simbol, ʃ... dx.* *Operator integral ini diperkenalkan oleh Leibniz yang karena kepopulerannya digunakan hingga saat ini.*

Jadi, untuk contoh fungsi diatas, anti turunan atau integral tak tentu dari fungsi : , adalah

Contoh 2 :

Hitung integral dari

Jawab :

Fungsi juga dapat dituliskan sebagai , maka dengan menggunakan aturan no. 1,

Contoh 3 :

Hitung integral dari

Jawab :

Dengan menggunakan aturan teorema C no. i, maka

Contoh 4 :

Hitung integral dari

Jawab :

Dengan menggunakan aturan teorema C no. ii, maka

Contoh 5 :

Hitung integral dari

Jawab :

Dengan menggunakan aturan teorema C no ii dan iii, maka

Contoh 6 :

Evaluasi integral berikut

Jawab :

Perhatikan;

Bila fungsi kita tuliskan sebagai atau , maka fungsi merupakan turunannya atau atau . Maka dengan menggunakan teorema D,

1. **Atural Lain**

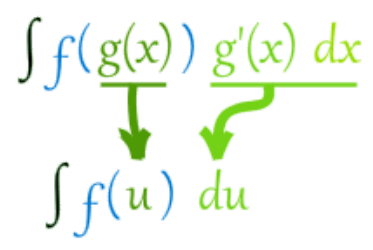
**Integral Subtitusi**

Integral subtitusi (biasa juga disebut *u-substitusion*) adalah metoda untuk menghitung integral hanya dalam kondisi bahwa integral tersebut dapat diatur dengan cara yang khusus.

Telah kita ketahui integral yang meiliki bentuk sebagai berikut

Contohnya ;

Disini, bila f adalah cos, , maka yang turunannya adalah . Perhatikan gambar dibawah ini, ketika bentuk integral yang kita punya seperti diatas maka dapat melakukan subtitusi seperti diagram berikut ini



Gambar 16. Integral subtitusi

Maka kemudian kita dapat mengintegrasikan fungsi dan dapat diselesaikan dengan menuliskan kembali sebagai fungsi . Berikut contohnya ;

terlihat sebagai diagram berikut,



Gambar 16.

Sekarang kita dapat mengintegralkan,

Kemudian kembalikan, , sehingga

Sekarang bagaimana apabila kita bertemu dengan bentuk integral seperti berikut ;

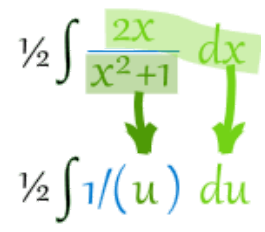
Untuk bentuk integral seperti diatas maka kita tinggak mengatur integran-nya saja (Tidak perlu panik !).

Maka bentuk integralnya sama dengan sepertii bentuk pada aturan integral teorema C no i, sehingga

Sekarang kita coba bentuk integral yang lebih rumit. Contohnya,

Perhatikan, turunan dari adalah . Maka kita atur bentuk integral diatas seperti berikut,

Lihat diagram berikut,



Gambar 17.

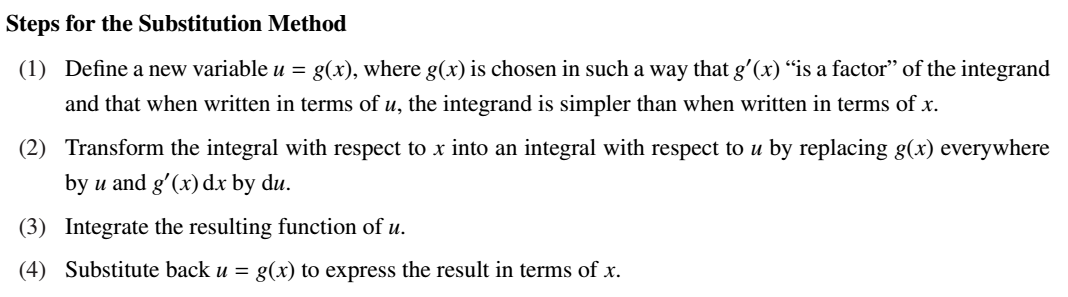
Hasilnya,

|  |  |
| --- | --- |
|  | \*Dijelaskan secara khusus pada bab *Fungsi Transenden* |

Kesimpulan :

Bila kita memiliki sebuah fungsi, , dimana ada integral yang berbentuk

Maka kita dapat lakukan pemisalan dan kemudian integralkan , dan kemudian selesaikan integral tersebut dengan mengembalikan bentuk ke .

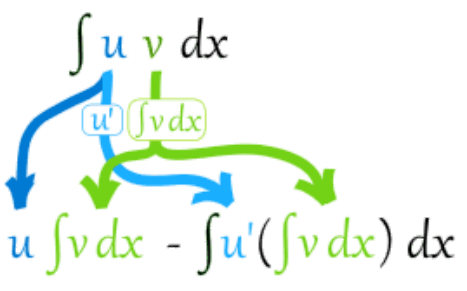


**Integral Parsial**

Integral parsial adalah metoda khusus dalam integral yang berguna untuk menghitung integral dari dua fungsi yang dikalikan secara bersamaan.

Bila adalah dan adalah , kita perhatikan aturan pengintegralan berikut,

Dalam bentuk diagram diperlihatkan oleh gambar dibawah ini,



Gambar 18.

Sekarang kita perhatikan contoh integral berikut dimana kita harus menyelesaikannya.

Contoh :

Selesaikan integral,

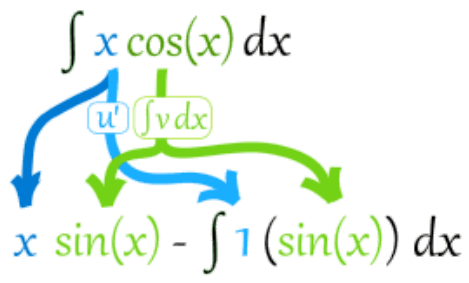
Jawab :

Misalkan, , dan . Sehingga bentuk integral diatas dalam format , dan kita dapat memprosesnya.

Langkah berikutnya,

* Turunan dari adalah
* Integral dari adalah

Sekarang kita dapat menyatukan semuanya. Lihat diagram dawah ini,



Gambar 19.

Jadi, solusi dari integral

adalah

Jadi kita telah melakukan langkah-langkah berikut ini :

1. Memilih dan .
2. Mencari turunan dari .
3. Mengintegralkan .
4. Menempatkan dan dalam sebuah formula integral
5. Menyederhanakan dan menyelesaikan integral-nya.

Setelah melihat contoh diatas, maka pertanyaannya adalah dari mana integral parsial berasal ?

**Integral parsial berasal dari aturan dalam produk turunan,**

**Dimana kemudian kita operasikan integral pada aturan turunan diatas dan atur posisinya,**

**Beberapa orang memilih bentuk diatas, tetai sebagian lian memilih bentuk,**